Chapitre 04. Équations différentielles

Corrigés des exercices À vous de jouer

Exercice d'application 1 page 67

Solution

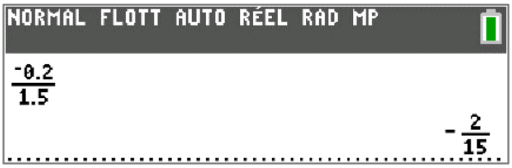
Attention : ici la variable est t.

D'après le cours les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = ke^{-\frac{-0,2}{1,5}t}.$$

Ainsi $y(t) = ke^{-\frac{2}{15}t}$ avec k un réel.

On peut utiliser la calculatrice pour simplifier la fraction.



Exercice d'application 2 page 67

Solution

1. On reconnait une équation différentielle du type $ay' + by = 0$ avec $a = 4$ et $b = -1$.

D'après le cours les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = ke^{-\frac{-1}{4}x} = ke^{\frac{1}{4}x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. On part de l'expression $y(x)$ trouvée dans le **1.** et on cherche k en utilisant $y(0) = 2$.

y est une solution de (E_4) donc d'après la question précédente on a pour tout $x \in \mathbb{R} : y(x) = ke^{\frac{1}{4}x}$.

Comme $y(0) = 2$, en remplaçant x par 0 on obtient $ke^{\frac{1}{4}\times 0} = 2$ soit $ke^0 = 2$.

Or $e^0 = 1$ donc $k = 2$.

Conclusion : Pour tout x réel on a $y(x) = 2e^{\frac{1}{4}x}$.

Exercice d'application 3 page 68

Solution

Étape 1 : on cherche l'équation caractéristique associée à (E).

$$r^2 + 3r - 10 = 0$$

Étape 2 : on résout l'équation.

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 1, b = 3$ et $c = -10$. On calcule son discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10)$

donc $\Delta = 9 + 40 = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times1} = \frac{-3-7}{2} = -5$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times1} = \frac{-3+7}{2} = 2.$

Étape 3 : on en déduit les solutions de (E).

D'après le cours, ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} \text{ avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux réels.}$$

Exercice d'application 4 page 69

Solution

Étape 1 : on cherche l'équation caractéristique associée à (E).

$$100r^2 - 60r + 9 = 0$$

Étape 2 : on résout l'équation.

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 100, b = -60$ et $c = 9$.

On calcule son discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4 \times 100 \times 9$

donc $\Delta = 3600 - 3600 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double réelle :

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-60)}{2\times100} = \frac{60}{200} = 0{,}3.$$

Étape 3 : on en déduit les solutions de (E).

D'après le cours, ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = e^{-0{,}3x}(C_1 + C_2x) \text{ avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux réels.}$$

Exercice d'application 5 page 69

Solution

Étape 1 : on cherche l'équation caractéristique associée à (E).

$$r^2 - 6r + 10 = 0$$

Étape 2 : on résout l'équation.

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 1, b = -6$ et $c = 10$.

On calcule son discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10$ donc $\Delta = 36 - 40 = -4$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times 1} = 3$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$

Étape 3 : on en déduit les solutions de (E).

D'après le cours, ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = e^{3x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) \text{ avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux réels.}$$

Exercice d'application 6 page 71

Solution

1. La fonction y_P est une fonction constante elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, on a $y_P'(x) = 0$.

De plus $y_P' + 5y_P = 0 + 5 \times 2 = 10$

donc y_P est bien une solution particulière de (E).

2. L'équation homogène associée à (E) est :

$$(H): y' + 5y = 0$$

3. (H) est une équation différentielle du premier ordre avec $a = 1$ et $b = 5$.

Les solutions de (H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_H(x) = Ce^{-\frac{-5}{1}x} = Ce^{-5x} \text{ avec } C \text{ un réel.}$$

4. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = y_H + y_P = Ce^{-5x} + 2$$

On peut vérifier les solutions à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

TInspire CX CAS	GeoGebra	XCAS en ligne
1.1 *Classeur RAD deSolve$(y'+5\cdot y=10,x,y)$ $y=c2\cdot e^{-5\cdot x}+2$	RésolEquaDiff$(y' + 5y = 10)$ $\rightarrow$ $y = c_1 e^{-5x} + 2$	desolve(y'+5y=10,x,y) $c_0 e^{-(5x)} + 2$