Chapitre 07. Modélisation et traitement du signal

Corrigés des exercices À vous de jouer

Exercice d'application 1 page 131

Solution

On pose $a_n = \frac{n}{3^n}$. On a alors $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n}\right| = \left|\frac{n+1}{3n}\right|$.

Or $\left|\frac{n+1}{3n}\right| \to \frac{1}{3}$ lorsque $n \to +\infty$ ce qui permet de déterminer le rayon de convergence R de la série entière étudiée :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad R = 3$$

On déduit donc que le rayon de convergence de la série étudiée est $R = 3$

Exercice d'application 2 page 132

Solution

$$X(z) = \sum_{n=0}^{4} x(n) \times z^{-n} = 4 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{0,5}{z^3} + \frac{0,25}{z^4}$$

Exercice d'application 3 page 134

Solution

Étape 1. On remarque que $x(n) = 2r(n) - u(n)$.

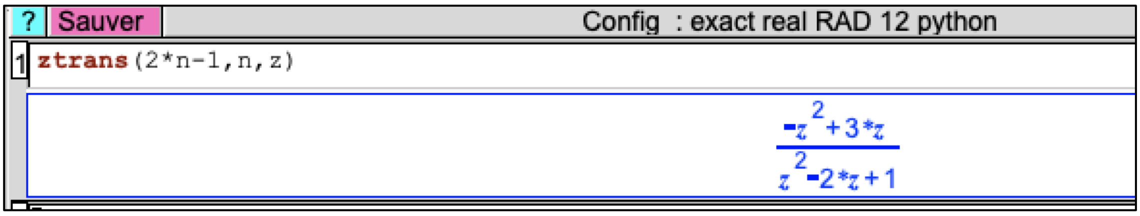
Étape 2. On repère dans le tableau les signaux causaux usuels mis en jeu (rampe unité et échelon unité).

Étape 3. On utilise la transformée en Z pour chaque signal causal discret :

$$R(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ et } U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$F(z) = 2 \times R(z) - U(z) \qquad \text{par linéarité de la transformation en } Z$$

$$F(z) = 2 \times \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} = \frac{2z - z(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{-z^2 + 3z}{(z-1)^2}$$



Exercice d'application 4 page 135

Solution

Étape 1. On remarque que $x(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times u(n)$.

Étape 2. On repère dans le tableau le signal causal usuel mis en jeu (échelon unité).

Étape 3. On utilise la transformée en Z pour ce signal causal discret :

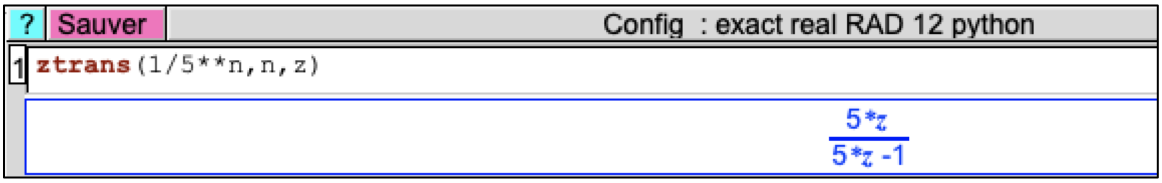
$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Étape 4. On applique la propriété de multiplication par a^n (ici pour $a = \frac{1}{5}$)

$$X(z) = U\left(\frac{z}{1/5}\right) = U(\,5z\,)$$

Étape 5. On remplace z dans l'expression précédente par $5z$.

$$X(z) = \frac{5z}{5z-1}$$



Exercice d'application 5 page 136

Solution

On utilise la linéarité de la transformation en z afin de revenir sur des signaux usuels :

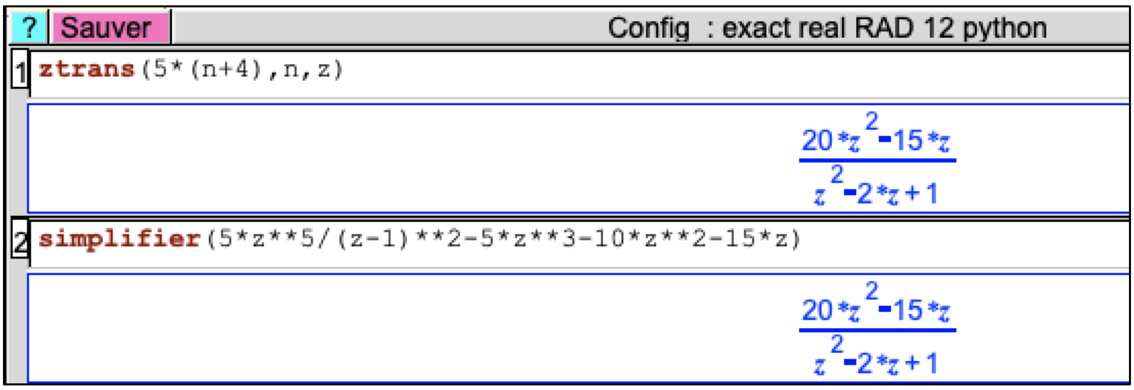
$x(n) = 5n \; = 5 \times r(n)$, on a donc $X(z) = 5 \times R(z) = \frac{5z}{(z-1)^2}$

On applique la relation donnant la transformée en z d'un signal avancé :

$$Y(z) = \; (Z(x(n+4)u(n+4))(z) = z^4 \times X(z) - \sum_{i=0}^{2} x(i) \times z^{k-i}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = z^4 \times \frac{5z}{(z-1)^2} - \; x(0) \times z^4 - \; x(1) \times z^3 - \; x(2) \times z^2 - \; x(3) \times z$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{5z^5}{(z-1)^2} - 5z^3 - \; 10z^2 - \; 15z$$



Exercice d'application 6 page 137

Solution

Étape 1. On remarque que $X(z) = 8\,z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2} + 7 \times \frac{z}{z-4}$

Étape 2. On repère dans le tableau les signaux causaux usuels correspondant aux transformées en z mises en jeu (rampe unité et signal puissance)

Étape 3. On utilise l'expression des signaux usuels correspondant à chacune des transformées en z étudiées :

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)(n) = r(n) \quad \text{et} \quad Z^{-1}\left(\frac{z}{z-4}\right)(n) = p(n)$$

On peut en déduire par linéarité de la transformation en z inverse que :

$$x(n) = Z^{-1}\left(8z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2} + 7 \times \frac{z}{z-4}\right)(n) = 8 \times Z^{-1}\left(z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2}\right)(n) + 7 \times Z^{-1}\left(\frac{z}{z-4}\right)(n)$$

On utilise les transformées en z des signaux causaux discrets usuels :

$$x(n) = 8 \times r(n-1) \times u(n-1) + 7 \times 4^n = 8(n-1) \times u(n-1) + 7 \times 4^n$$

Exercice d'application 7 page 141

Solution

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{p}{p^2 + 4^2} = \frac{p}{p^2 + 16}$$

Exercice d'application 8 page 141

Solution

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(t^3 u(t))(p) + \mathcal{L}(tu(t))(p) + 2\mathcal{L}(u(t))(p) = \frac{3!}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} = \frac{6}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$$

Exercice d'application 9 page 143

Solution

$$f(t) = (t-1+5)u(t-1) = (t-1)u(t) + 5u(t-1) \text{et} \mathcal{L}(f(t)) = \mathrm{e}^{-p} \times \frac{1}{p^2} + 5\mathrm{e}^{-p} \times \frac{1}{p}$$

Exercice d'application 10 page 144

Solution

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p}\right) = u(t-2)$$